A **Prezime, ime, br. indeksa:** ____________________________________ **25.11.2018.**

Studijski program E1 E2 PR SW IT IN (zaokruži) KOLOKVIJUM 1

Studenti koji kod pitanja do zvezdica naprave više od osam grešaka nisu položili ispit! U svakom zadatku dato je više odgovora, a treba zaokružiti brojeve ispred tačnih odgovora. U jednom istom zadatku broj tačnih odgovora može biti 0,1,2,3,...,svi. U nekim zadacima ostavljena su prazna mesta za upisivanje odgovora. Na kraju testa su tri zadatka koji se rade u datoj svesci. Obavezno se predaje ovaj test i sveska. ________

- Pri deljenju polinoma x^4+x^2+1 sa x^2-x+1 nad $\mathbb{R}$, količnik je ______________, a ostatak je ________.

- Zaokružiti brojeve ispred tvrđenja koja su tačna u svakoj Bulovoj algebri $(B,+,\cdot,',0,1)$ za sve $a,b\in B$:
  1) $(1')'=a'\cdot 0'+a+b$ **2)** $a+ab=1'+a\cdot 0'$ **3)** $a\cdot 1'=bb'$ **4)** $1+a'=0'+b$ **5)** $(a')'\cdot(b')'=(a'+b')'$

- Odrediti realni i imaginarni deo, moduo, argument, i konjugovani broj kompleksnog broja $z=-1+2e^{-i\frac{\pi}{3}}$:
  $Re(z)=$, $Im(z)=$, $|z|=$, $\arg(z)=$, $\overline{z}=$, $z^{-1}=$.

- Neka su funkcije $f:(0,1)\to(0,1)$ i $g:(0,1)\to(0,1)$ definisane sa $f(x)=\sqrt[7]{x}$ i $g(x)=\sqrt{1-x}$. Izračunati:
  1) $f^{-1}(x)=$ **2)** $g^{-1}(x)=$ **3)** $(f\circ g)(x)=$ **4)** $(f\circ g)^{-1}(x)=$ **5)** $(g^{-1}\circ f^{-1})(x)=$

- $\arg(0)=$, $\arg(-i\sqrt{2})=$, $\arg(-\sqrt{2})=$, $\arg(i\sqrt{2})=$, $\arg(\sqrt{2})=$, $\arg(1-\frac{1}{\sqrt{2}})=$.

- Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred struktura koje su grupe.
  1) $(\{-1,1\},\cdot)$ **2)** $(\mathbb{Z}_5\setminus\{0\},\cdot)$ **3)** $(\mathbb{N},\cdot)$ **4)** $(\mathbb{Q}^+,\cdot)$ **5)** $(\mathbb{R},\cdot)$ **6)** $(\{-1,0,1\},\cdot)$ **7)** $\left(\{\left(\begin{smallmatrix}1&2\\1&2\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}1&2\\2&1\end{smallmatrix}\right)\},\circ\right)$

* *

- Za svaku od datih relacija u skupu $A=\{1,2,3\}$ zaokružiti samo ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje: R- refleksivnost S- simetričnost A- antisimetričnost T- tranzitivnost F- funkcija.

  (relacija „nije manji od"): R S A T F, (relacija „veći od"): R S A T F,
  (relacija „deli"): R S A T F, $\rho=\{(1,1),(2,2),(3,3),(3,1),(3,2),(2,1)\}$: R S A T F,
  $\rho=\{(1,3),(1,2),(2,1)\}$: R S A T F, $\rho=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$: R S A T F,
  $\rho=\emptyset$: R S A T F, $\rho=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$: R S A T F.

- $\left\{e^{i(\arg z+\arg z^{-1})}|z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\right\}=\{\qquad\}$ $\left\{e^{i(\arg z-\arg(-z))}|z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\right\}=\{\qquad\}$

- Bijektivne funkcije su: **1)** $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}^+,\ f(x)=\log_3 x$ **2)** $f:(-\infty,-2)\to(-\infty,4),\ f(x)=-x^2-4x$ **3)** $f:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{arctg} x$ **4)** $f:(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})\to(\frac{\sqrt{3}}{2},1],\ f(x)=\sin x$ **5)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x$

- Ako je $z\in\mathbb{C}$ tada je $z^6=64\Leftrightarrow z\in\{2,-2,1+i\sqrt{3},-1-i\sqrt{3},\qquad,\qquad\}$

- Ako je p polinom stepena 3 nad proizvoljnim poljem F tada: **1)** p je nesvodljiv nad F akko p nema korena u F **2)** ako p ima 3 korena u F onda je p svodljiv nad F **3)** ništa od prethodnog

- Zaokružiti grupoide sa neutralnim elementom, koji nisu grupe: **1)** $(\mathbb{Z}_7\setminus\{0\},\cdot)$ **2)** $(\{f|f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\},\circ)$ **3)** $(\mathbb{Z}_4,+)$ **4)** $(\mathbb{Z}_4,\cdot)$ **5)** $(\{3k|k\in\mathbb{Z}\},\cdot)$ **6)** $(\mathbb{R}[x],\cdot)$ **7)** $(\mathbb{N}\cup\{0\},+)$ **8)** $(\mathbb{Z},\cdot)$

- Bar jedan najveći zajednički delitelj za polinome $P(t)=2(t-4)^7(t+9)^3(t-5)^5(t+17)^3$ i $Q(t)=7(t-3)^2(t-15)(t-4)^3(t+17)^5$ je:

- Zaokružiti brojeve ispred algebarskih struktura koja su polja. **1)** $\left(\{f_k|f_k(x)=kx,k\in\mathbb{R}\},+,\circ\right)$
  2) $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}},+,\cdot)$ **3)** $(\mathbb{R}[t],+,\cdot)$ **4)** $(\mathbb{Z}_4,+,\cdot)$ **5)** $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ **6)** $(\mathbb{Z}_3,+,\cdot)$ **7)** $\left(\{f|f:\mathbb{R}\xrightarrow[\text{na}]{1-1}\mathbb{R}\},+,\circ\right)$

- Neka je $\mathcal{G}=(\{7^n|n\in\mathbb{N}\}_{\equiv_3},\cdot)$, gde je $\cdot$ množenje po modulu 3 u skupu $\{7^n|n\in\mathbb{N}\}_{\equiv_3}$.
  1) $\mathcal{G}$ je grupoid. **2)** U $\mathcal{G}$ postoji neutralni elemenat. **3)** $\mathcal{G}$ je grupa.

- Zaokružiti grupe : **1)** $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$ **2)** $(\{-1,1\},\cdot)$ **3)** $(\{-1,i,1,-i\},\cdot)$ **4)** $(\{z|z^6=1,z\in\mathbb{C}\},\cdot)$ **5)** $((0,1),\cdot)$ **6)** $((-\infty,0),\cdot)$ **7)** $((0,\infty),\cdot)$ **8)** $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$ **9)** $(\{e^{i\theta}|\theta\in\mathbb{R}\},\cdot)$

- Zaokružiti oznaku polja za koje važi da je polinom t^3+t+1 svodljiv nad njima. $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{Z}_3$ $\mathbb{Z}_5$

- $\left\{dg(P)\,\middle|\,P \text{ je nesvodljiv polinom nad poljem } \mathbb{C}\right\}=\{\qquad\}$

- $\left\{dg(P)\,\middle|\,P \text{ je nesvodljiv polinom nad poljem } \mathbb{R}\right\}=\{\qquad\}$

- Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred jednakosti koje su tačne u skupu kompleksnih brojeva:
1) $z\overline{z}=|z|^2$ **2)** $Re(z)=\frac{1}{2}(z-|z|)$ **3)** $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$ **4)** $\overline{z}\in\mathbb{R} \Rightarrow z=\overline{z}$
5) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2$ **6)** $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$ **7)** $z\neq 0\Rightarrow z^{-1}=|z|^{-2}\overline{z}$ **8)** $|z|=1\Rightarrow z^{-1}=\overline{z}$

- Zaokružiti brojeve ispred sirjektivnih funkcija:
1) $f:(0,\frac{\pi}{4})\to(0,\infty),\ \ f(x)=\operatorname{tg}x$ **2)** $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R},\ \ f(x)=3-x$ **3)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \ f(x)=x^2$
4) $f:\mathbb{R}\to[0,\infty),\ \ f(x)=x^2$ **5)** $f:[0,\infty)\to[0,\infty),\ \ f(x)=x^2$ **6)** $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R},\ \ f(x)=\ln x$

- Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koja su tačna u svakom prstenu $(F,+,\cdot)$:
1) $a+bc=(a+b)(a+c)$ **2)** $(F\setminus\{0\},+)$ je grupa **3)** $(F,\cdot)$ je grupa **4)** operacija $+$ je distributivna prema $\cdot$ **5)** $ab=0\Rightarrow a=0\vee b=0$ **6)** $a\neq 0\wedge b\neq 0\Rightarrow ab\neq 0$ **7)** $a\cdot 0=0$ **8)** $(F\setminus\{0\},\cdot)$ je grupa

- Funkcija $f:(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3})\longrightarrow(-1,1)$ definisana sa $f(x)=\cos x$ je: **1)** sirjektivna i nije injektivna
2) injektivna i nije sirjektivna **3)** nije injektivna i nije sirjektivna **4)** bijektivna

- Navesti geometrijsku interpretaciju skupova A,B,C,D,E i sledećih kompleksnih funkcija $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $h:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ i $s:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, kao i odgovoriti na pitanje injektivnosti i sirjektivnosti funkcija f, g, h i s.

$f(z)=\frac{1}{2}\overline{z}(-1+i\sqrt{3})$ je ______________________________

$g(z)=ze^{i\frac{\pi}{7}}$ je ______________________________

$h(z)=iI_m(z)$ je ______________________________

$s(z)=|z|e^{i\arg(-z)}\wedge s(0)=0$ je ______________________________

$A=\{z||z^7|=i^8\}$ je ______________________________

$B=\{z|z^7=i^8\}$ je ______________________________

$C=\{z|z=-\overline{iz}\}$ je ______________________________

$D=\{e^{i(\arg z+\arg(\overline{z}))}|z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\}$ je ______________________________

$E=\{z|iI_m(z)=iR_e(z)\}$ je ______________________________

- Neka je $\{1,-2\}$ skup **svih** korena polinoma $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, gde su $a,b,c\in\mathbb{R}$. Tada skup svih mogućnosti za a je __________, skup svih mogućnosti za b je __________ i skup svih mogućnosti za c je __________.

- Napisati primer (ukoliko postoji):
1) Funkcije f čiji su originali i slike iz skupa $\{1,2,3,4,5\}$: $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\ &&&&\end{pmatrix}$
2) Injektivne funkcije f skupa $\{1,2,3,4,5\}$ u skup $\{1,2,3,4\}$: $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\ &&&&\end{pmatrix}$
3) Neinjektivne funkcije f skupa $\{1,2,3,4\}$ u skup $\{1,2,3,4\}$: $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ &&&\end{pmatrix}$
4) Sirjektivne funkcije f skupa $\{1,2,3\}$ u skup $\{1,2,3,4\}$: $f=\begin{pmatrix}1&2&3\\ &&\end{pmatrix}$
5) Nesirjektivne funkcije f skupa $\{1,2,3,4\}$ u skup $\{1,2,3,4\}$: $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ &&&\end{pmatrix}$
6) Injektivne funkcije f skupa $\{1,2,3,4\}$ u skup $\{1,2,3,4\}$: $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ &&&\end{pmatrix}$
7) Sirjektivne funkcije f skupa $\{1,2,3,4\}$ u skup $\{1,2,3,4\}$: $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ &&&\end{pmatrix}$

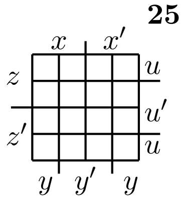
- Ako je $A=\left\{dg(P)\;\middle|\;P(x)=ax^3+bx+c \text{ je polinom nad poljem realnih brojeva i } c\neq 0\right\}$, tada je:
1) $A=\{3\}$ **2)** $A=\{3,2\}$ **3)** $A=\{3,1\}$ **4)** $A=\{3,1,0\}$ **5)** $A=\{3,2,1,0\}$

$\boxed{\text{A}}$ **ZADACI** **25.11.2018.**

1. Napisati SVE proste implikante i SVE minimalne disjunktivne normalne forme Bulove funkcije

$$f(x,y,z,u)=xyzu'+xyz'u'+xy'zu'+xy'z'u'+x'y'z'u'+x'y'z'u+x'yz'u.$$

Napomena: tablicu nacrtati kao na slici desno.



2. Neka je $A=\{\rho e^{i\frac{2k}{7}\pi}|\rho>0\wedge k\in\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}\}=\{\rho e^{i\frac{2k}{7}\pi}|\rho>0\wedge k\in\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}\}$. $A=\{\rho e^{i\frac{2k}{7}\pi}\,|\,\rho>0\wedge k\in\mathbb{Z}\}$. Dokazati da je $(A,\cdot)$ komutativna grupa, gde je $\cdot$ množenje kompleksnih brojeva. Naći jednu 7-članu podgrupu grupe $(A,\cdot)$.

2'. $A_\rho=\{\rho e^{i\frac{2k}{7}\pi}\mid k\in\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}\}=\{\rho e^{i\frac{2k}{7}\pi}\mid k\in\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}\},\ \rho>0.$
$A_\rho=\{\rho e^{i\frac{2k}{7}\pi}\mid k\in\mathbb{Z}\},\ \rho>0$. Dokazati da je $(A_\rho,\cdot)$ je komutativna grupa samo za $\rho=1$, gde je $\cdot$ množenje kompleksnih brojeva. Naći podgrupe grupe $(A_1,\cdot)$. Napomena: $A=\bigcup\limits_{\rho\in R^+}A_\rho$

3. Neka je $p(x)=x^5-4x^4+4x^3+4x^2-12x+8$ polinom nad poljem $\mathbb{R}$. Nad poljima $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}$ rastaviti $p(x)$ na proizvod nesvodljivih polinoma (faktorisati), ako se zna da je $1+i$ jedan njegov kompleksni koren.